

**КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. АЛЬ-ФАРАБИ**

**Утверждено на заседании  
Научно-методического совета  
КазНУ им. аль-Фараби  
протокол № \_\_\_\_\_  
от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020 г.**

**ПРОГРАММА  
ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ  
ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ РНДДОКТОРАНТУРУ  
ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ «8D005401 - Математика»**

## АЛМАТЫ 2020

Программа составлена в соответствии с Государственным общеобразовательным стандартом по специальности «8D005401 - Математика». Программу разработали д.ф.-м.н., профессор Б.Е. Кангужин, д.ф.-м.н., ф.-м.ғ.д., проф. Б.С. Байжанов, профессор С.А.Бадаев, д.ф.-м.н. М.Б.Сихов, д.ф.-м.н., профессор М.К.Дауылбаев, к.ф.-м.н., профессор Н.Аканбай к.ф.-м.н., доцент Ж.Нурпеис, к.ф.-м.н., доцент Х. Хомпыш, к.ф.-м.н., и.о. доцента У.Р.Кушербаева.

Программа рассмотрена на заседании кафедры фундаментальной математики, дифференциальных уравнений и теории управления.

Протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2020 г.

Зав.кафедрой ФМ д.ф.-м.н., проф. \_\_\_\_\_ У.Р.Кушербаева

Зав.кафедрой ДУ и ТУ к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ Х.Хомпыш

Одобрена на заседании методбюро механико-математического факультета

Протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2020 г.

Председатель методбюро \_\_\_\_\_ Г.Е. Абдурахитова

Утверждена на заседании Ученого совета

Протокол № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 2020г.

Председатель Ученого совета,

декан факультета PhD \_\_\_\_\_ Д.Б.Жакебаев

Ученый секретарь \_\_\_\_\_ А.С. Жұмәлі

## Содержание

### 1. Цели и задачи вступительного экзамена в PhD по специальности «8D005401 - Математика»

Вступительный экзамен в PhD по специальности «8D005401 - Математика» преследует цель - выявление уровня знаний по математике в объеме магистерской программы классического университета достаточной для квалифицированной разработки фундаментальных теоретических исследований с целью получения новых результатов в области современной математики. Для достижения указанной цели вступительного экзамена ставятся следующие задачи:

- оценить уровень знаний в области линейной и общей алгебры;
- оценить уровень знаний в области математического и функционального анализа;
- оценить уровень знаний в области аналитической и дифференциальной геометрии;
- оценить уровень знаний по обыкновенным дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики;
- оценить уровень знаний по теории вероятностей и математической статистике;
- оценить уровень знаний по теории функции действительного и комплексного переменного;
- оценить уровень знаний по вариационному исчислению и методам оптимизации;
- оценить уровень знаний по численным методам алгебры, анализа дифференциальных и интегральных уравнений;
- оценить уровень знаний в области дискретной математики.

Форма приема экзамена – письменно.

### 2. Требования к уровню подготовки лиц поступающих в докторантуру PhD

К вступительному экзамену в PhD докторантуру по специальности «8D005401 - Математика» допускаются специалисты, имеющие академическую степень магистра по математике или ученую степень не ниже кандидата физико-математических наук по специальности – математика. Поступающий должен владеть материалом по программе магистратуры по специальности «8D005401 - Математика» иметь склонность к творческой научной деятельности в области математики, а также иметь научно-методологические навыки и умения:

- формулировать проблему, цель и задачи исследования;
- выбирать адекватные задачам методы исследования;

- вести информационно-аналитическую и информационно-библиографическую работу с привлечением современных технологий;
- анализировать собранную информацию и объяснять полученные результаты;
- представлять итоги проделанной работы в виде отчетов, рефератов, статей, оформленных в соответствии с современными требованиями.

**3. Пререквизиты образовательной программы:** Основы алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, дифференциального уравнения, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики.

#### **4. Перечень экзаменационных тем**

##### **«Математический анализ»**

1. Числовые последовательности. Верхний и нижний пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса и критерий Коши для числовых последовательностей.
2. Предел функций, непрерывность и равномерная непрерывность функций. Теорема Вейерштрасса о равномерной непрерывной на замкнутом отрезке.
3. Производная и дифференциал функции одной переменной. Связь между ними. Инвариантность формы первого дифференциала.
4. Понятие обратной функции и постановка вопроса. Доказать простейший вариант теоремы существования обратной функции. Дифференцирование обратной функции одной переменной, производные обратных тригонометрических функций.
5. Функция многих переменных. Кратный и повторные пределы. Связь между ними. Частные производные. Дифференциал функции многих переменных. Дифференцируемость функций многих переменных. Дифференцирование сложной функции многих переменных.
6. Понятие неявной функции и постановка вопроса. Общая теорема о неявной и обратной функций.
7. Якобиан. Замена переменных в кратном интеграле. Формула Грина для двукратного интеграла.
8. Поверхностные интегралы. Основные теоремы интегрального исчисления.

##### **«Функциональный анализ»**

9. Метрическое, линейное нормированное, банахово и гильбертовопространства. Примеры метрического, нормированного, банахова и гильбертова пространств.
10. Последовательности и свойствасходящихся последовательностей в метрических и линейных нормированных пространствах.

11. Непрерывные отображения в метрическом пространстве. Непрерывность и компактность в метрических пространствах. Принцип сжимающих отображений в метрическом пространстве.
12. Общий вид линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве. Теорема Рисса.
13. Измеримые множества и их свойства. Измеримые функции и их свойства.
14. Интеграл Лебега. Различие между интегралами Лебега и Римана. Пространства  $L_p(\Omega)$  и их свойства.
15. Линейные операторы в банаховых и гильбертовых пространствах. Ограниченные операторы, неограниченные операторы, замкнутые операторы. Норма оператора.

### **«Теория вероятностей и стохастический анализ»**

16. Общее вероятностное пространство. Классическое и геометрическое определение вероятностей. Условная вероятность. Формула произведения вероятностей. Независимые события, независимые испытания. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
17. Случайные величины. Законы распределения случайных величин. Математическое ожидание случайных величин. Дисперсия. Повторные независимые испытания. Формулы Бернулли.
18. Общее определение случайного процесса и конечномерные распределения случайного процесса.
19. Винеровский процесс. Конечномерные распределения винеровского процесса и характеристическое свойство винеровского процесса.
20. Корреляционная функция случайного процесса. Свойства.

### **«Алгебраические структуры»**

21. Понятия алгебраической структуры. Гомоморфизмы и изоморфизмы алгебраической структур. Группа автоморфизмов алгебраической структур. Примеры.
22. Полугруппы. Моноиды. Обратимые элементы. Группы. Циклические группы.
23. Изоморфизмы. Теорема Кэли. Гомоморфизмы. Ядро и образ гомоморфизма. Связь с нормальными подгруппами.
24. Смежные классы. Индексы. Теорема Лагранжа и ее следствия.
25. Кольцо. Делители нуля. Сравнения. Кольцо классов вычетов. Гомоморфизмы колец.
26. Поле. Характеристика поля. Конечные поля. Построение поля Гауа.
27. Отношения. Отношения эквивалентности, свойства классов эквивалентности. Отношение частичного порядка. Линейный порядок. Наименьший, наибольший, минимальный и максимальный элементы. Доказать, что в конечном частично упорядоченном множестве всегда есть минимальный элемент.

28. Принцип Дирихле. Формула включения и исключения. Число элементов в декартовом произведении конечного числа конечных множеств.

**«Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики»**

29. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных систем уравнений первого порядка.
30. Однородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами. Фундаментальная система решений. Неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Системы однородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, свойства решений. Формула Остроградского-Лиувилля.
31. Постановка краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Задача Штурма-Лиувилля. Теоремы существования и единственности решения Штурма-Лиувилля. Существование собственных значений краевых задач для линейного обыкновенного дифференциального уравнения.
32. Определение функции Грина для задачи Штурма-Лиувилля и ее существование. Решение краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения с помощью функции Грина.
33. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных (Метод Лагранжа).
34. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений в частных производных второго порядка в случае многих переменных.
35. Задача Коши для уравнения параболического типа. Фундаментальное решение оператора теплопроводности. Объемный тепловой потенциал, поверхностный тепловой потенциал и их основные свойства.
36. Задача Коши для уравнения гиперболического типа. Понятие характеристики для уравнения гиперболического типа. Метод продолжения.
37. Постановка и основные методы решения краевых задач для уравнения эллиптического типа. Пример Адамара о некорректности задачи Коши для уравнения Лапласа.
38. Метод разделения переменных. Общая схема метода Фурье. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля.
39. Метод Фурье для решения смешанных задач для уравнений параболического и гиперболического типов.
40. Цилиндрические функции. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя.
41. Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и Пуассона. Функция Грина для задачи Дирихле, её свойства. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона с помощью функции Грина.

## 5. Список рекомендуемой литературы

### Основная литература:

#### **«Математический анализ»**

1. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть I. М.: «Наука» 1982. 616 С.
2. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть II. М.: «Наука» 1980. 447 С.
3. Темиргалиев Н.Т., Математикалық анализ, т. I-III, 1987,1991 ж.ж.
4. Ибрашев Х.И., Еркеғұлов Ш.Т. Математикалық анализ курсы. Алматы. Мектеп, Т.1,2. 1963-1970.
5. В.А. Зорич, Математический анализ, Часть I, II. 2017г.
6. Ахметқалиев Е. Математикалық талдау. Алматы, РБҚ, 1997.

#### **«Функциональный анализ»**

7. Наурызбаев Қ.Ж., Нақты анализ, Алматы, “Қазақ университеті”,2004.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа,-М.:Наука,1989
9. Люстерник Л.А.,Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.- М.:”Высшая школа”,1982
- 10.Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.:Наука,1967.

#### **«Теория вероятностей и математическая статистика»**

- 11.Н.Ш. Кремер. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: “ЮНИТИ”, 2000. 544 с.
12. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей и математическая статистика. – М.: Изд. МГУ, 2006.
13. А.Н.Ширяев. Случайные процессы. – М.: Изд. МГУ, 1972.
- 14.Н. Ақанбай. Ықтималдықтар теориясы (I – бөлім) – Алматы.: “Қазақ университеті”, 2001. 296 бет.
15. Н. Ақанбай Ықтималдықтар теориясының есептері мен жаттығуларының жинағы – Алматы,: “ Қазақ университеті”, 2004. 377 бет.
16. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясы (3-бөім). Алматы.: «Қазақ университеті», 2007, 297 бет.
17. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясының есептері мен жаттығуларының жинағы (3-бөлім). Алматы.: «Қазақ университеті», 2007, 256 бет.
18. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясы (2-бөім). Алматы.: «Қазақ университеті», 2006, 368 бет.
19. Н.Ақанбай. Ықтималдықтар теориясының есептері мен жаттығуларының жинағы (2-бөлім). Алматы.: «Қазақ университеті», 2007, 332 бет

### **«Алгебраические структуры»**

20. С.А. Бадаев. СЫЗЫҚТЫҚ алгебра және аналитикалық геометрия. Том 2: СЫЗЫҚТЫҚ алгебра. Алматы: «Издательство LEM» ЖШС, 2014. 416 бет.
21. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. М.: «Наука» 1984. 294 С.
22. А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть I. (Основы алгебры). М.: Физматлит, 2001. 254 С.
23. А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Часть III. (Основные структуры). М.: Физматлит, 2001. 271 С.
24. Isaiah Lankham, Bruno Nachtergaele, Anne Schilling. Linear Algebra As an Introduction to Abstract Mathematics. Copyright © 2007 by the authors. pp. 246.

### **«Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики»**

25. Сүлейменов Ж. Дифференциалдық теңдеулер курсы, Оқулық. Алматы, Қазақ университеті, 2009.- 440 б.
26. Қадыкенов Б.М. Дифференциалдық теңдеулердің есептері мен жаттығулары. Алматы, 2002.
27. Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений» 4-е изд. Минск: «Высшая школа». 1974. 768 С.
28. Л.Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969. 425 С.
29. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., 1970.
30. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1974.
31. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с подробными решениями. М.: УРСС, 2005.- 256 с.
32. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1983.
33. Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері, оқулық. -Астана, Астана полиграфия, 2010. 376 б.

### **Дополнительная литература:**

1. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. - М.:Наука,1984.
2. Иосида К., Функциональный анализ. - М.: “Мир”, 1967.
3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - М.: Наука,1984.
4. Садовничий В.А. Теория операторов. -М. ”Высшая школа”, 2000.
5. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной, М.: Гостехиздат, 1957.
6. Севастьянов Б.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: «Наука», 1982. 256 с.,



7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей и математическая статистика. М.: «ЮНИНТИ», 1988. 448 с.,
8. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М.: “Высшая школа”, 1985. 112 с.
9. В.А. Колемаев, О.В. Староверов, В.Б. Турундаевский Теория вероятностей и математическая статистика – М.: “Высшая школа”, 1991. 400 с.
10. Н. Аканбай, З.И. Сүлейменова, С.Қ. Тәпеева Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистикадан тест сұрақтары, Алматы, “Қазақ университеті”, 2005 ж., 254 бет.
11. Владимирова В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-е изд. - М.: Физматлит, 2003.
12. Хомпыш Х. Математикалық физика теңдеулері. Оқу құралы. -Алматы: Қазақ университеті, 2017 ж.
13. Краснов, М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: УРСС, 2002.- 253 с.
14. Федорюк, М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения :Изд. 3-е, стер.- СПб.: Лань, 2003.- 447 стр.
15. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям :Изд. 2-е.- М.: Изд-во ЛКИ, 2008.- 235 с.
16. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. М.: «Наука» 1984. 294 С.
17. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Аналитическая геометрия. М.: «Наука» 1971. 232 С.